CONCOURS DE RECRUTEMENT AU PROFESSORAT DE L'ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRE AGRICOLE **C A P E S A**

SESSION 2008

Concours : EXTERNE
Section : Mathématiques

DEUXIEME EPREUVE ECRITE D'ADMISSIBILITE

Deuxième composition

Coefficient : 2,5 – Durée : 5 heures

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul est autorisé, notamment celui des calculatrices de poche, à condition qu'elles soient à fonctionnement autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante.

Le sujet comporte six pages.

L'énoncé comprend cinq parties.

Notations, rappels et objectifs du problème

‹‹ On considère dans le champ de la pesanteur deux points A et B et un point matériel M se déplaçant sans frottement sur une courbe d'extrémités A et B. Pour quelle (s) courbe (s), le temps de parcours est-il minimal lorsque le point M part du point A avec une vitesse nulle ? ››. Tel est le problème énoncé au XVII$^{\text{ème}}$ siècle par Jean Bernoulli.
Dans le cadre de ce problème, nous nous proposons de déterminer parmi les fonctions f suffisamment régulières sur $[0,1]$ et vérifiant $f(0)=1$, $f(1)=0$ celles qui minimisent, lorsqu'elle existe, l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}}{\sqrt{(1-f(x))}}\,dx. \tag{1}$$

En effet, pour un point décrivant une trajectoire d'équation $y=f(x)$, sa vitesse de déplacement sur la courbe vaut selon les lois de la mécanique $\frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,t}=k\left(\sqrt{1-f(x)}\right)$ où s désigne l'abscisse curviligne du point sur sa trajectoire et k une constante liée à l'accélération de la pesanteur. Or $\frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,x}=\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}$; il en découle $\mathrm{d}\,t=\frac{\sqrt{1+(f'(x))^2}}{k\sqrt{1-f(x)}}\,\mathrm{d}\,x$ de sorte que l'intégrale (1) est proportionnelle au temps mis par le mobile pour aller de A à B.

Notations

Nous désignerons par E l'ensemble des fonctions f à valeurs dans $]-\infty,1]$, définies et continues sur $[0,1]$, continûment dérivables sur $]0,1[$, vérifiant en outre $f(0)=1$, $f(1)=0$ et $f(]0,1])\subset]-\infty,1[$ pour lesquelles l'intégrale (1) est convergente. Pour tout f de E, nous poserons

$$\Phi(f)=\int_0^1 \frac{\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}}{\sqrt{(1-f(x))}}\,dx$$

Rappels

On dit qu'une fonction f est convexe sur un intervalle I si

$$\forall\lambda\in]0,1[\,,\forall(x,y)\in I^2,\quad f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

On dit qu'une fonction f est strictement convexe sur un intervalle I si

$$\forall\lambda\in]0,1[\,,\forall(x,y)\in I^2 \text{ tel que } x\neq y,\quad f(\lambda x+(1-\lambda)y)<\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

Objectifs

Partie A : nous explicitons quelques propriétés d'une fonction convexe utilisées dans la partie E.

Partie B : nous résolvons une équation différentielle avec conditions aux limites.

Partie C : nous identifions la solution obtenue précédemment à un arc de cycloïde.

Partie D : nous établissons que l'équation différentielle étudiée en B est une condition nécessaire pour que certaines fonctions soient solutions du problème posé par Jean Bernoulli.

Partie E : nous donnerons la valeur minimale de Φ et la seule fonction de E qui minimise Φ.

Partie A

Soit f une fonction dont le domaine de définition est un intervalle I non trivial de $\mathbb{R}$.

1. Propriétés générales des fonctions convexes.
   Nous supposerons que f est convexe sur I et désignerons par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
   Soient A, B, C, D quatre points de la courbe (C) d'abscisses respectives a, b, c, d telles que $a < b < c < d$.

   a. Déterminer λ de sorte que b soit le barycentre des points a et c de la droite réelle affectés des masses respectives λ et $1 - \lambda$.

   b. En déduire en utilisant la convexité de f : $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \dfrac{f(c) - f(b)}{c - b}$

   c. Prouver alors les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} &\leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b} \leq \frac{f(d) - f(c)}{d - c} \\ \frac{f(b) - f(a)}{b - a} &\leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(d) - f(a)}{d - a} \end{aligned}$$

   d. Illustrer graphiquement les trois propriétés précédentes (énoncées en A-1.b et A-1.c).

   e. Montrer que f est continue sur l'intérieur de I.

2. Critère de convexité d'une fonction dérivable deux fois sur I.
   Nous supposerons que f est dérivable deux fois sur I.
   L'objet de cette question est de montrer l'équivalence suivante :

$$f \text{ convexe sur } I \Leftrightarrow f'' \text{ positive sur } I$$

   a. Nous supposerons ici que f est convexe sur I.

      i. Soient b et c deux réels quelconques, intérieurs à I tels que $b < c$.
      Prouver que $f'(b) \leq f'(c)$.

      ii. En déduire que la dérivée seconde f'' est positive sur I.

   b. Nous supposerons ici que la dérivée seconde f'' est positive sur I.

      i. Soient a, b, c trois réels de I tels que $a < b < c$.
      Prouver à l'aide du théorème des accroissements finis que :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

      ii. En déduire que f est convexe sur I.

3. Minimum d'une fonction convexe.
   Soit U une fonction convexe sur l'intervalle $[0, 1]$ qui soit dérivable à droite en 0 et dont le nombre dérivé à droite en 0 vaut $U'_d(0) = 0$.
   Prouver que U est croissante sur $[0, 1]$.

Partie B

Nous dirons qu'une fonction $f : [0,1] \to [0,1]$ satisfait aux **conditions (I)** si :

- f est continue, strictement décroissante sur $[0,1]$ et vérifie $f(0) = 1$, $f(1) = 0$.
- Il existe un réel C, $C \geq \dfrac{1}{2}$ tel que f est solution sur $]0,1[$ de l'équation différentielle :

$$(1-y)\,y'^2 = 2C - 1 + y$$

1. On considère la fonction $\varphi : t \mapsto \arccos t - \sqrt{1-t^2} - 1 + t$.
   a. Préciser le domaine de continuité de la fonction φ.
   b. Montrer que φ est dérivable sur $]-1,1[$ et expliciter φ' sur $]-1,1[$.
   c. Étudier les limites suivantes :
   $$\lim_{\substack{t\to -1\\ t>-1}} \frac{\varphi(t)-\varphi(-1)}{t+1} \text{ et } \lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}} \frac{\varphi(t)-\varphi(1)}{t-1}$$
   d. En déduire le domaine de dérivabilité de la fonction φ.
   e. Justifier le signe de la fonction dérivée et dresser le tableau des variations de φ.
2. L'équation $\varphi(t) = 0$
   a. Prouver l'existence dans $[-1,1[$ d'un unique nombre θ tel que $\varphi(\theta) = 0$.
   b. Déterminer alors l'unique entier N tel que $N - \dfrac{1}{2} \leq 1000\,\theta < N + \dfrac{1}{2}$.
   c. En déduire l'arrondi décimal au millième près de θ.
3. Soit f une fonction satisfaisant aux conditions (I).
   a. Montrer qu'une telle fonction réalise une bijection de $[0,1]$ vers $[0,1]$ dont la réciproque g vérifie
   $$\forall y \in]0,1[\,, \quad (g'(y))^2 = \frac{1-y}{2C+y-1} \text{ et } g'(y) = \frac{y-1}{C\sqrt{1-\left(\frac{y-1+C}{C}\right)^2}}$$
   b. En déduire qu'il existe un réel K tel que
   $$\forall y \in]0,1[\,, \quad g(y) = -C\sqrt{1-\left(\tfrac{y-1+C}{C}\right)^2} + C\arccos\tfrac{y-1+C}{C} + K$$
   c. Montrer alors qu'il existe au plus une fonction f satisfaisant aux conditions (I) et que la constante C associée vérifie la condition $\frac{C-1}{C} = \theta$, où θ est le nombre définie en B-2.a. Donner l'arrondi décimal de C à 10^{-3} près.
4. Considérons la fonction γ définie sur $[0,1]$ par :
   $$\forall y \in [0,1]\,, \quad \gamma(y) = \frac{\arccos(\theta + y(1-\theta)) - \sqrt{1-(\theta+y(1-\theta))^2}}{1-\theta}$$
   a. Montrer que γ réalise une bijection de $[0,1]$ vers $[0,1]$ dérivable sur $[0,1]$.
   b. Montrer que sa réciproque Λ est dérivable sur $]0,1]$ et satisfait aux conditions (I).
   c. Représenter avec soin cette réciproque dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité 10 cm.

Partie C

Nous noterons $t_0 = \arccos(\theta)$ où θ est l'unique solution dans $[-1, 1[$ de l'équation $\varphi(t) = 0$ vue en question 2 de la partie B. Nous admettrons que $2,412$ est l'arrondi décimal de t_0 à 10^{-3} près. Considérons alors les fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u(t) = \frac{t - \sin t}{1 - \theta} \quad \text{et} \quad v(t) = \frac{-\theta + \cos t}{1 - \theta}$$

Soit P le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
Considérons les points M et Ω mobiles du plan affine dont les positions à l'instant t sont définies par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{OM} = u(t)\,\overrightarrow{i} + v(t)\,\overrightarrow{j} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{O\Omega} = \frac{t}{1-\theta}\,\overrightarrow{i} - \frac{\theta}{1-\theta}\,\overrightarrow{j}$$

1. Trajectoire du point M dans le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
   a. Où se trouve le point M aux instants $t = 0$ et $t = t_0$?
   b. Préciser en justifiant soigneusement votre réponse des transformations géométriques simples laissant la trajectoire de M globalement invariante.
   c. Quels sont les points singuliers de cette trajectoire ?
   d. Étudier simultanément les variations de u et v.
   e. Représenter sommairement la trajectoire de M entre les instants $t = 0$ et $t = 4\pi$.
2. Trajectoire de M dans le repère $\left(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$
   a. Calculer $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{O\Omega}}{\mathrm{d}t}$ et préciser la nature du mouvement de Ω dans le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
   b. Exprimer $\overrightarrow{\Omega M}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\Omega M}}{\mathrm{d}t}$ en fonction de t et préciser la nature du mouvement de M dans le repère $\left(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
3. En déduire que la courbe représentative de la fonction Λ définie en B-4.b est un arc de cycloïde. (Nous rappelons qu'une cycloïde est la courbe décrite par le point d'un cercle qui roule sans glissement sur une droite)

Partie D

Nous supposerons qu'il existe une fonction f continue sur $[0, 1]$ de classe C^2 sur $]0, 1[$ vérifiant en outre les conditions suivantes :

i. f est strictement décroissante sur $[0, 1]$.
ii. $\forall h \in E, \quad \Phi(f) \leq \Phi(h)$ où E et Φ sont définies dans les notations en début de problème.
iii. $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$.

On considère la fonction $\Psi : (u, v) \mapsto \dfrac{\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{1-v}}$.

1. Établir que Ψ est de classe C^1 sur son domaine de définition.
   Expliciter les dérivées partielles $\dfrac{\partial \ln \circ \Psi}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial \ln \circ \Psi}{\partial v}$.
   Exprimer $\dfrac{\partial \Psi}{\partial u}(u, v)$ et $\dfrac{\partial \Psi}{\partial v}(u, v)$ en fonction de $\Psi(u, v)$, u et v.

2. Soient a et b deux réels vérifiant $0 < a < b < 1$ et ω une fonction continue sur $[0,1]$ de classe C^2 sur $]0,1[$ nulle hors de $[a,b]$.

   a. Que valent $\omega(a)$ et $\omega(b)$?

   b. Montrer que les fonctions $(x,t) \mapsto f'(x) + t\omega'(x)$ et $(x,t) \mapsto f(x) + t\omega(x)$ sont de classe C^1 sur $]0,1[\times \mathbb{R}$.

   c. On considère alors la fonction $\Theta : (x,t) \mapsto \Psi(f'(x) + t\omega'(x), f(x) + t\omega(x))$.
   - Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que la fonction Θ soit définie et de classe C^1 sur $[a,b] \times [-\eta, +\eta]$.
   - Expliciter $\dfrac{\partial \Theta}{\partial t}$ et vérifier $\dfrac{\partial \Theta}{\partial t}(x,0) = A(x)\omega'(x) + B(x)\omega(x)$ où A et B sont des fonctions définies sur $[a,b]$ à exprimer en fonction de f et f'.

   d. Justifier
$$\Phi(f + t\omega) - \Phi(f) = \int_a^b [\Theta(x,t) - \Theta(x,0)] \, \mathrm{d}x \text{ pour tout } t \in [-\eta, +\eta].$$

   e. En déduire
$$\lim_{t \to 0} \frac{\Phi(f + t\omega) - \Phi(f)}{t} = \int_a^b \left(B(x) - \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}(x) \right) \omega(x) \, \mathrm{d}x.$$

   f. Justifier alors
$$\int_a^b \left(B(x) - \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}(x) \right) \omega(x) \, \mathrm{d}x = 0$$

3. En déduire que $B(x) - \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}(x) = 0$ pour tout $x \in]0,1[$.

4. Montrer que f est nécessairement solution sur $]0,1[$ de l'équation différentielle : $1 + y'^2 = 2y''(1-y)$

5. Prouver alors que $(1-f)(1+f'^2)$ est une fonction constante sur $]0,1[$ et que f satisfait nécessairement aux conditions (I) définies au début de la partie B.

Partie E

Soit γ la fonction définie en B-4 et Λ sa fonction réciproque.

1. Déterminer $\Phi(f_1)$ où $f_1 : x \mapsto 1 - x$.

2. a. Montrer que : $\Phi(\Lambda) = \int_0^1 \dfrac{\sqrt{1 + \gamma'(y)^2}}{\sqrt{1-y}} \, dy$.

   b. En déduire à l'aide du changement de variables : $u : y \mapsto \theta + y(1-\theta)$
$$\Phi(\Lambda) = \sqrt{2}\left(\sqrt{1-\theta} + \sqrt{1+\theta} \right)$$

On peut montrer, en utilisant des arguments de convexité sur des fonctions bien choisies, que ce dernier résultat constitue pour la fonction Φ une valeur minimale atteinte pour la seule fonction Λ. Son arrondi au millième est 2,582.